فصل سوم-چندجمله‌ای تیلور

در این کاربرگ می‌خواهیم تعمیمی از تقریب خطی ارائه دهیم. تا به حال دو تقریب از تابعی مانند f در نقطه a ارائه داده‌ایم؛ اولی تابع ثابت $p_0(x) = f(a)$ و دیگری تقریب خطی $p_1(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$. طبق قضایای مقدار میانگین برای مشتق اول و دوم بدست آوردیم:

$$f(x) - p_0(x) = f'(c)(x-a), \quad (\text{برای یک } c \text{ بین } a \text{ و } x)$$
$$f(x) - p_1(x) = \frac{1}{2}f''(c)(x-a)^2, \quad (\text{برای یک } c \text{ بین } a \text{ و } x).$$

می‌خواهیم همین روند را ادامه دهیم. توابع ثابت و خطی ساده‌ترین توابعی هستند که می‌شناسیم. برای جایگزین توابع ثابت و خطی، چندجمله‌ای‌ها را در نظر می‌گیریم. در واقع شبیه آنچه که در مورد تقریب خطی اثبات کردیم، می‌خواهیم در مورد چندجمله‌ای‌ها نیز بدست آوریم.

فعالیت ۱.

الف) تقریب p_0 تنها مقدارش در نقطه a با مقدار تابع برابر است؛ اما در مورد p_1 نه تنها مقدار دو تابع در نقطه a یکی است بلکه مشتقات اول آنها نیز یکسان است. فرض کنید f یک تابع حداقل دو بار مشتق‌پذیر و p_2 یک چندجمله‌ای درجه دو باشد. ضرایب p_2 را طوری تعیین کنید که مقدار p_2 و مشتقات اول و دوم آن در نقطه a با مقادیر متناظر آن به ازای f برابر باشند.

ب) مانند قسمت (الف)، p_3 را طوری بیابید که مقدار چندجمله‌ای و مشتقات اول تا سوم آن در نقطه a با تابع سه بار مشتق‌پذیر f، برابر باشند.

ج) چندجمله‌ای p_n را حدس بزنید.

تعریف ۱. فرض کنید f یک تابع n بار مشتق‌پذیر باشد. چندجمله‌ای تیلور درجه n تابع f حول نقطه a، به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$p_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{۱!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

فعالیت ۲.

الف) چندجمله‌ای تیلور درجه n تابع $\sin x$ را حول نقطه $a = ۰$ بنویسید.

ب) چندجمله‌ای تیلور درجه n تابع $\cos x$ را حول نقطه $a = ۰$ بنویسید.

ج) چندجمله‌ای تیلور درجه n تابع $x^{-۱}$ را حول نقطه $a = ۱$ بنویسید.

گزاره زیر در مورد سرعت نزدیک شدن چندجمله‌ای تیلور درجه n به تابع f در نقطه a بحث می‌کند. اثبات آن با استقراء و استفاده از قضیه مقدار میانگین سرراست است و خواندن آن از کتاب به دانشجویان واگذار شده و در اینجا آورده نمی‌شود.

گزاره ۲. اگر $p(x)$ چندجمله‌ای تیلور درجه n تابع f حول نقطه a باشد، آنگاه

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-p(x)}{(x-a)^n} = ۰.$$

حال شبیه قضیه مقدار میانگین برای مشتق دوم، می‌توان قضیه‌ای برای چندجمله‌ای تیلور درجه n نوشت، که به قضیه باقیمانده لاگرانژ معروف است.

قضیه ۳ (باقیمانده لاگرانژ)**.** فرض کنید تابع f روی بازه باز I، $(n+۱)$ بار مشتق‌پذیر باشد و $a \in I$. اگر $p(x)$ چندجمله‌ای تیلور درجه n تابع f حول نقطه a باشد، به ازای هر x در I،

$$f(x) - p(x) = \frac{۱}{(n+۱)!} f^{(n+۱)}(c)(x-a)^{n+۱}$$

که c نقطه‌ای بین a و x است.

فعالیت ۳ (اثبات قضیه ۳)**.**

الف) گزاره زیر را ثابت کنید.

گزاره ۴ (قضیه رُل تعمیم یافته)**.** فرض کنید تابع f روی بازه I، $(n+۱)$ بار مشتق‌پذیر باشد، a و b دو نقطه از I باشند، $a < b$ و

$$f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(n)}(a) = f(b) = ۰.$$

در این صورت، نقطه‌ای مانند c وجود دارد که $a < c < b$ و $f^{(n+۱)}(c) = ۰$.

ب) با توجه به گزاره ۴، قضیه ۳ را اثبات کنید.

فعالیت ۴.

الف) فرض کنید برای محاسبه $\sin(0.1)$ از تقریب $\sin x \approx x - \frac{1}{3!}x^3$ استفاده کرده‌ایم. کران بالایی برای خطای محاسبه بدست آورید.

ب) اگر برای محاسبه $(1.01)^{-1}$ از چندجمله‌ای تیلور درجه n (فعالیت ۲، قسمت (ج)) استفاده کرده باشیم، کران بالایی برای خطای محاسبه بدست آورید.

شبیه آنچه در مورد آزمون مشتق دوم و پیدا کردن مینیمم و ماکسیمم موضعی بیان کردیم، می‌توان برای مشتقات مرتبه بالاتر نیز بیان کرد. اثبات آن با استفاده از گزاره ۲، شبیه اثبات آزمون مشتق دوم است و از آوردن اثبات آن در اینجا خودداری می‌کنیم.

گزاره ۵ (آزمون مشتق n ام)**.** فرض کنید تابع f در نقطه درونی a از دامنه تعریفش n بار مشتق‌پذیر باشد ($n \geq 2$)، مشتق‌های آن در نقطه a تا مرتبه $(n-1)$ صفر باشند و $f^{(n)}(a) \neq 0$. در این صورت

الف) اگر n زوج باشد، برحسب اینکه $f^{(n)}(a) > 0$ یا $f^{(n)}(a) < 0$ نقطه a مینیمم موضعی یا ماکسیمم موضعی است.

ب) اگر n فرد باشد، نقطه a نه ماکسیمم موضعی است نه مینیمم موضعی.

فعالیت ۵.

الف) وضعیت نقطه ۰ را برای تابع $f(x) = x^6 \cos x - x^5 \sin x$ بررسی کنید.

ب) نقاط بحرانی $f(x) = (x^2 - 2x)^{100}$ را بررسی کنید.